

Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy

Cálculo para Processos Fuzzy Interativos

Laécio Carvalho de Barros
Estevão Esmi

Francielle Santo Pedro Simões
Vinícius Francisco Wasques

1 Dia 1

- Preliminares
- Interatividade

2 Dia 2

- Números fuzzy A-correlacionados
- Cálculo Diferencial e Integral Fuzzy em $\mathbb{R}_{F(A)}$
- Equações Diferenciais Ordinárias em $\mathbb{R}_{F(A)}$

3 Dia 3

- Números Fuzzy J_γ -Interativos
- Equações diferenciais interativas
- Métodos numéricos para Equações Diferenciais Fuzzy via J_γ
- Soluções via princípio de extensão sup- J para Equações Diferenciais Fuzzy via J_γ

Esse minicurso trata do cálculo diferencial e integral de processos fuzzy com memória, isto é, processos cujos valores futuros possuem uma relação funcional com os valores passados, o que significa interatividade no processo fuzzy.

Interatividade entre variáveis fuzzy (ou possibilidades), introduzida por Zadeh, se assemelha à noção de dependência para o caso de variáveis aleatórias. Assim como no caso estocástico, teoria fuzzy também se utiliza da noção de distribuição conjunta para indicar o tipo de interatividade entre duas ou mais variáveis fuzzy possibilísticas.

Na literatura, números fuzzy interativos nada mais são que variáveis possibilísticas caracterizadas por funções de pertinências. Assim, nesse curso usaremos a denominação "números fuzzy interativos" no lugar de "variáveis possibilísticas".

Um (sub)conjunto A de um universo $X \neq \emptyset$ é descrito por sua função de pertinência

$$\mu_A : X \longrightarrow [0, 1],$$

sendo que $\mu_A(x)$ significa o grau que x pertence a A . Por conveniência denotaremos $\mu_A(x)$ por $A(x)$.

Os α -níveis de um subconjunto fuzzy A são subconjuntos clássicos definidos por:

$$[A]_\alpha = \{x \in X : A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1$$

e, quando X é um espaço topológico, por exemplo $X = \mathbb{R}^n$,

$$[A]_0 = \overline{\{x \in U : A(x) > 0\}}.$$

O símbolo $\mathbb{F}(X)$ denota o conjunto de todos os subconjuntos fuzzy de X .

Vamos focar numa classe particular de conjuntos fuzzy de \mathbb{R} chamada números fuzzy, que será denotada por \mathbb{R}_F .

Número fuzzy

Um subconjunto fuzzy A de \mathbb{R} é um número fuzzy se

- todos os seus α -níveis são intervalos fechados e não-vazios de \mathbb{R} , e
- o suporte de A , $\text{supp}(A) = \{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\}$, é limitado.

Denotamos os α -níveis de um número fuzzy A por $[A]_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $\alpha \in [0, 1]$.

O comprimento (*length*) do α -nível de A é definido por

$$\text{len}([A]_\alpha) = a_\alpha^+ - a_\alpha^-, \text{ para todo } \alpha \in [0, 1].$$

O diâmetro de A é definido como $\text{diam}(A) = \text{len}([A]_0)$.

Métrica d_∞

A métrica d_∞ em \mathbb{R}_F é definida para cada $A \in \mathbb{R}_F$ e $B \in \mathbb{R}_F$ como segue:

$$d_\infty(A, B) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|a_\alpha^- - b_\alpha^-|, |a_\alpha^+ - b_\alpha^+|\}.$$

A norma de um número A é definida por $\|A\| = d_\infty(A, 0)$.

O número fuzzy triangular é denotado pela tripla $(a; b; c)$ com $a \leq b \leq c$ e seus α -níveis são dados por

$$[a + \alpha(b - a), c - \alpha(c - b)], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

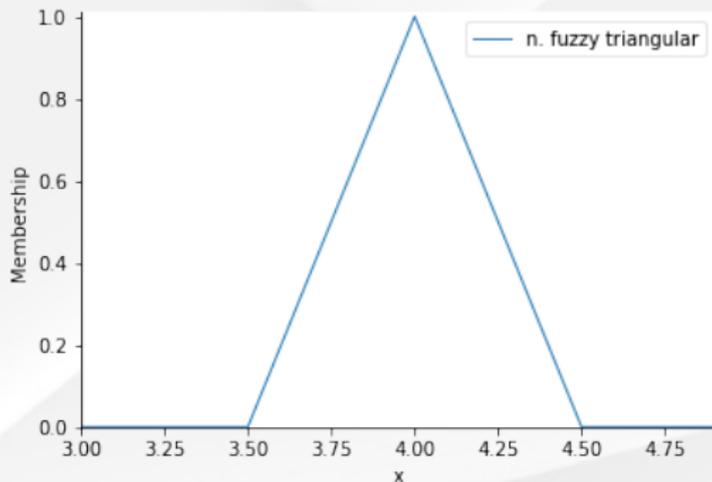


Figure: Número fuzzy triangular $A = (3, 5; 4; 4, 5)$.

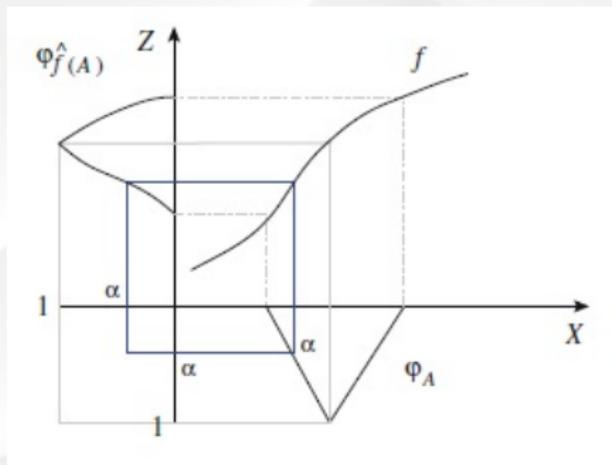
O princípio de extensão de Zadeh é uma ferramenta matemática usada para estender funções clássicas para um domínio fuzzy.

Princípio de extensão de Zadeh

Considere $f : X \rightarrow Y$ e $A \in \mathbb{F}(X)$. A extensão de Zadeh de f em A é o conjunto fuzzy $\hat{f}(A) \in \mathbb{F}(Y)$ dado por

$$\hat{f}(A)(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} A(x) \quad (1)$$

sendo $f^{-1}(y)$ denominado pré-imagem de y pela função f , isto é, $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Por definição, $\sup \emptyset = 0$.



Princípio de extensão de Zadeh para funções com múltiplos argumentos

Considere $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ e $A_i \in \mathbb{F}(X_i)$, $i = 1, \dots, n$. O princípio de extensão de Zadeh de f em (A_1, \dots, A_n) é o conjunto fuzzy $\hat{f}(A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{F}(Y)$ dado por

$$\hat{f}(A_1, \dots, A_n)(y) = \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)} \min \{A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)\}. \quad (2)$$

Teorema 1

(a) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $A \in \mathbb{R}_F$, então $\hat{f}(A) \in \mathbb{R}_F$, e

$$[\hat{f}(A)]_\alpha = f([A]_\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

(b) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $A_i \in \mathbb{R}_F$, $i = 1, \dots, n$, então $\hat{f}(A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{R}_F$, e

$$[\hat{f}(A_1, A_2, \dots, A_n)]_\alpha = f([A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \dots, [A_n]_\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

O princípio de extensão de Zadeh pode ser usado para definir operações aritméticas para números fuzzy.

Considere $A, B \in \mathbb{R}_F$.

1. A soma de A e B é dada por $A + B = \hat{+}(A, B)$, sendo $+(a, b) = a + b$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
2. A diferença entre A e B é dada por $A - B = \hat{-}(A, B)$, sendo $-(a, b) = a - b$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
3. A multiplicação entre A e B é dada por $A \cdot B = \hat{\cdot}(A, B)$, sendo $\cdot(a, b) = ab$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Se $A = \lambda \in \mathbb{R}$, então chamamos de multiplicação por escalar e denotamos por λB .
4. A divisão de A por B , $0 \notin [B]_0$, é dada por $A \div B = \hat{\div}(A, B)$, sendo $\div(a, b) = a \div b$ para todo $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

onde $\hat{\otimes}$ é a extensão de Zadeh da operação $\otimes \in \{+, -, \cdot, \div\}$.

O resultado a seguir é uma consequência do Teorema 1 e caracteriza as operações aritmética entre números fuzzy em termos de seus α -níveis.

Proposição 2

Considere $A, B \in \mathbb{R}_F$ com $[A]_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ e $[B]_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$. Para cada $\alpha \in [0, 1]$, temos

- $[A + B]_\alpha = [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+]$.
- $[A - B]_\alpha = [a_\alpha^- - b_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-]$.
- $[A \cdot B]_\alpha = [\min Y_\alpha, \max Y_\alpha]$, sendo $Y_\alpha = \{a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+\}$.
- Se $A = \lambda \in \mathbb{R}$, então

$$[\lambda B]_\alpha = \lambda[B]_\alpha = \begin{cases} [\lambda b_\alpha^-, \lambda b_\alpha^+] & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda b_\alpha^+, \lambda b_\alpha^-] & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} .$$

- $[A \div B]_\alpha = [\min Z_\alpha, \max Z_\alpha]$, sendo $Z_\alpha = \left\{ \frac{a_\alpha^-}{b_\alpha^-}, \frac{a_\alpha^-}{b_\alpha^+}, \frac{a_\alpha^+}{b_\alpha^-}, \frac{a_\alpha^+}{b_\alpha^+} \right\}$ se $0 \notin [B]_0$.

Considere $\lambda = 2$ e os números fuzzy triangulares $A = (-1; 0; 1)$ e $B = (1; 2; 4)$. Como $[A]_\alpha = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$ e $[B]_\alpha = [1 + \alpha, 4 - 2\alpha]$, tem-se

- $[A + B]_\alpha = [2\alpha, 5 - 3\alpha]$.
- $[A - B]_\alpha = [3\alpha - 5, -2\alpha]$.
- $[A - A]_\alpha = [\alpha - 2, 2 - \alpha] \neq [0, 0]$.
- $[A \cdot B]_\alpha = [-2(\alpha - 1)(\alpha - 2), 2(\alpha - 1)(\alpha - 2)]$.
- $[2B]_\alpha = 2[B]_\alpha = [2(1 + \alpha), 2(4 - 2\alpha)]$.
- $[A \div B]_\alpha = [(\alpha - 1)/(1 + \alpha), (1 - \alpha)/(1 + \alpha)]$.
- $[B \div B]_\alpha = [(1 + \alpha)/(4 - 2\alpha), (4 - 2\alpha)/(1 + \alpha)] \neq [1, 1]$.

No Exemplo, vemos que $A - A = A + (-A) \neq 0$, isto é, não existe inverso aditivo. Desta forma, o espaço de números fuzzy com a aritmética usual não satisfaz a estrutura algébrica de um espaço vetorial.

Definição: diferença de Hukuhara

Sejam $A, B \in \mathbb{R}_F$. O número fuzzy D é a diferença de Hukuhara de A e B , denotada por $D = B -_H A$, se

$$D = B -_H A \Leftrightarrow B = A + D.$$

Note que se $B -_H A$ existe, então $len[B]_\alpha > len[A]_\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Definição: diferença generalizada de Hukuhara

Sejam $A, B \in \mathbb{R}_F$, a diferença generalizada de Hukuhara (ou gH -diferença) é o número fuzzy D , se ele existe, tal que

$$B -_{gH} A = D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = A + D \\ \text{ou } A = B - D \end{array} \right. ,$$

sendo que "+" e "-" representam, respectivamente, a soma e subtração usual de números fuzzy.

Se $B -_{gH} A$ existe, então

$$[B -_{gH} A]_\alpha = [\min\{b_\alpha^- - a_\alpha^-, b_\alpha^+ - a_\alpha^+\}, \max\{b_\alpha^- - a_\alpha^-, b_\alpha^+ - a_\alpha^+\}]. \quad (3)$$

Definição

Um número fuzzy $P \in \mathbb{R}_F$ é considerado positivo (resp. negativo) se seu conjunto de nível 1, $[p_1^-, p_1^+]$, está à direita (resp. Esquerda) de $0 \in \mathbb{R}$, ou seja, se $p_1^- \geq 0$ (resp. $p_1^+ \leq 0$).

A operação binária \odot em \mathbb{R}_F é chamada de produto cruzado entre os números fuzzy B e C .

Proposição 3

Se B e C são números fuzzy positivos, então $P = B \odot C$ é definido por $[P]_\alpha = [p_\alpha^-, p_\alpha^+]$, onde

$$p_\alpha^- = b_\alpha^- c_1^- + b_1^- c_\alpha^- - b_1^- c_1^- \text{ e } p_\alpha^+ = b_\alpha^+ c_1^+ + b_1^+ c_\alpha^+ - b_1^+ c_1^+ \quad (4)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, é um número fuzzy positivo.

Definição

O produto cruzado é definido para quaisquer números fuzzy cujo 1-nível contém apenas um elemento, ou seja,

$$\hat{\mathbb{R}}_F = \{A \in \mathbb{R}_F : [A]_1 \text{ tem apenas um elemento}\}. \quad (5)$$

Note que o produto cruzado entre B e C é a extensão de Zadeh da linearização de $f(x, y) = xy$ em torno de (b_1, c_1) .

Integral de Aumann

Considere a função fuzzy $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$. A integral de Aumann F sobre $[a, b]$, denotada por $(FA) \int_a^b F(t)dt$, é definida através de seus α -níveis:

$$\begin{aligned} \left[(FA) \int_a^b F(t)dt \right]_{\alpha} &= (A) \int_a^b [F(t)]_{\alpha} dt = (A) \int_a^b [f_{\alpha}^{-}(t), f_{\alpha}^{+}(t)] dt \\ &= \left\{ \int_a^b y(t)dt \mid y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ é uma seleção mensurável de } [F(\cdot)]_{\alpha} \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, sempre que (6) define um número fuzzy.

Se a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_F$ é Aumann fuzzy integrável em $[a, b]$, então as integrais das funções f_{α}^{-} e f_{α}^{+} sobre $[a, b]$ existem and satisfazem a igualdade:

$$\left[(FA) \int_a^b F(t)dt \right]_{\alpha} = \left[\int_a^b f_{\alpha}^{-}(t)dt, \int_a^b f_{\alpha}^{+}(t)dt \right], \quad (7)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Integral de Riemann Fuzzy

Uma função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ é dita ser Riemann fuzzy integrável se existe $S \in \mathbb{R}_F$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ com $t_i - t_{i-1} < \delta, i = 1, \dots, n$, tem-se

$$d_\infty \left(\sum_{i=1}^n F(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), S \right) < \epsilon,$$

sendo $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, n$, e a somatória é dada em termos de adição usual. Nesse caso, S é a integral de Riemann fuzzy de F sobre $[a, b]$ e é denotada por $(FR) \int_a^b F(s) ds$.

Proposição 5

Se $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ é uma função contínua, então as integrais de Aumann e Riemann fuzzy de F existem e são iguais, isto é,

$$(FA) \int_a^b F(s) ds = (FR) \int_a^b F(s) ds.$$

As operações usuais entre números fuzzy são obtidas através do princípio de extensão de Zadeh. Vamos generalizar tais operações considerando uma distribuição de possibilidade conjunta.

Distribuição de possibilidade conjunta (DPC)

Um conjunto fuzzy $J \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição de possibilidade conjunta (DPC) para $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}_F$ se cada A_i é a projeção de J , isto é,

$$A_i = P_i(J)(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x_i=y} J(x), \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Definição

Os números fuzzy A_1, \dots, A_n são não interativos se sua DPC é dada por $J(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_1(x_1) \wedge \dots \wedge A_n(x_n)$ e, dessa forma, $[J]_\alpha = [A_1]_\alpha \times \dots \times [A_n]_\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Caso contrário, A_1, \dots, A_n são chamados de J -interativos ou, simplesmente, interativos e, neste caso, $[J]_\alpha \subset [A_1]_\alpha \times \dots \times [A_n]_\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Denotamos a família de distribuições de possibilidades conjuntas de \mathbb{R}^n pelo símbolo $\mathbb{F}_J(\mathbb{R}^n)$.

Se $J \in \mathbb{F}_J(\mathbb{R}^2)$, então J é uma DPC de $A \in \mathbb{R}_F$ e $B \in \mathbb{R}_F$ desde que

$$\max_{x_2} J(x_1, x_2) = A(x_1) \text{ e } \max_{x_1} J(x_1, x_2) = B(x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (8)$$

Neste caso, A e B também são chamadas de distribuições de possibilidade marginal de J .

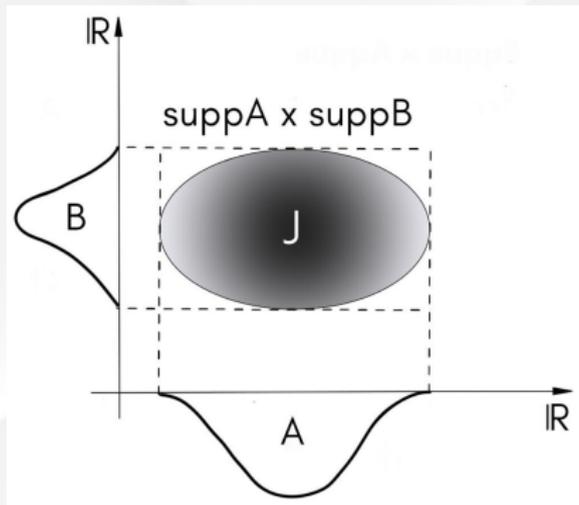


Figure: Uma distribuição de possibilidade conjunta J de $A \in \mathbb{R}_F$ e $B \in \mathbb{R}_F$.

Sejam A e B números fuzzy J -interativos e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. A extensão sup- J de f em (A, B) é o conjunto fuzzy $f_J(A, B)$ de \mathbb{R} tal que

$$f_J(A, B)(z) = \hat{f}(J)(z) = \sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} J(x, y), \forall z \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

sendo $f^{-1}(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = f(x, y)\}$.

Teorema 6

Sejam $A, B \in \mathbb{R}_F$, J uma DPC cuja as distribuições de possibilidades marginais são dadas por A e B de forma que cada $[J]_\alpha$ é um conjunto não vazio, conexo e compacto. Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f_J : \mathbb{R}_F \times \mathbb{R}_F \rightarrow \mathbb{R}_F$ é bem definida e

$$[f_J(A, B)]_\alpha = f([J]_\alpha) \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]. \quad (10)$$

Para definir as operações aritméticas entre números fuzzy interativos basta substituir o princípio de extensão de Zadeh (Equação (2)) pelo princípio sup- J (Equação (9)).

Se existe uma função $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a DPC J é dada por

$$J(x, y) = A(x) \chi_{\{(u, v); v = \mathcal{F}(u)\}}(x, y) = B(y) \chi_{\{(u, v); v = \mathcal{F}(u)\}}(x, y), \quad (11)$$

então os números fuzzy A e B são chamados de \mathcal{F} -iterativos. Uma vez que J satisfaz $P_2(J) = B$, pode-se mostrar que (11) é equivalente a $B = \hat{\mathcal{F}}(A)$, isto é

$$B(y) = \sup_{z \in \mathcal{F}^{-1}(y)} \mu_A(z) \text{ para todo } z \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Logo, se \mathcal{F} é uma função contínua, do Teorema 1, temos que os α -níveis são dados por

$$[B]_\alpha = \mathcal{F}([A]_\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Se \mathcal{F} é invertível, então $A = \mathcal{F}^{-1}(B)$ e, neste caso,

$$[J]_\alpha = \{(x, \mathcal{F}(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [A]_\alpha\} = \{(\mathcal{F}^{-1}(y), y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [B]_\alpha\}. \quad (13)$$

Se A e B são números fuzzy \mathcal{F} -iterativos, então as operações aritméticas $B \otimes_{\mathcal{F}} A$ são definidas por

$$(B \otimes_{\mathcal{F}} A)(y) = \sup_{x \in \Phi_{\otimes}^{-1}(y)} A(x) \quad (14)$$

sendo $\Phi_{\otimes}^{-1}(y) = \{x | y = x \otimes z, z = \mathcal{F}(x)\}$, e $\otimes \in \{+, -, \times, \div\}$. Pelo Teorema 6, se \mathcal{F} é uma função contínua, então temos, $\forall \alpha \in [0, 1]$,

- $[B +_{\mathcal{F}} A]_{\alpha} = \{\mathcal{F}(x) + x \in \mathbb{R} | x \in [A]_{\alpha}\}$;
- $[B -_{\mathcal{F}} A]_{\alpha} = \{\mathcal{F}(x) - x \in \mathbb{R} | x \in [A]_{\alpha}\}$;
- $[B \cdot_{\mathcal{F}} A]_{\alpha} = \{x\mathcal{F}(x) \in \mathbb{R} | x \in [A]_{\alpha}\}$;
- $[B \div_{\mathcal{F}} A]_{\alpha} = \{\mathcal{F}(x) \div x \in \mathbb{R} | x \in [A]_{\alpha}\}$, $0 \notin [A]_0$.

A multiplicação por escalar λB com $B = \mathcal{F}(A)$ é dada por

$$[\lambda B]_{\alpha} = [\lambda \hat{\mathcal{F}}(A)]_{\alpha} = \lambda \mathcal{F}([A]_{\alpha}) = \{\lambda \mathcal{F}(x) \in \mathbb{R} | x \in [A]_{\alpha}\}.$$

Ademais, se \mathcal{F} é diferenciável em $[A]_0$, então

$$[B +_{\mathcal{F}} A]_{\alpha} = \begin{cases} [b_{\alpha}^{-} + a_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+} + a_{\alpha}^{+}] & , \text{ se } \mathcal{F}'(x) \geq 0 \\ [b_{\alpha}^{+} + a_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{-} + a_{\alpha}^{+}] & , \text{ se } -1 \leq \mathcal{F}'(x) < 0 \\ [b_{\alpha}^{-} + a_{\alpha}^{+}, b_{\alpha}^{+} + a_{\alpha}^{-}] & , \text{ se } \mathcal{F}'(x) < -1 \end{cases} , \forall x \in [A]_{\alpha} \quad (15)$$

e

$$[B -_{\mathcal{F}} A]_{\alpha} = \begin{cases} [b_{\alpha}^{-} - a_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+} - a_{\alpha}^{+}] & , \text{ se } \mathcal{F}'(x) \geq 1 \\ [b_{\alpha}^{+} - a_{\alpha}^{+}, b_{\alpha}^{-} - a_{\alpha}^{-}] & , \text{ se } 0 \leq \mathcal{F}'(x) < 1 \\ [b_{\alpha}^{-} - a_{\alpha}^{+}, b_{\alpha}^{+} - a_{\alpha}^{-}] & , \text{ se } \mathcal{F}'(x) < 0 \end{cases} , \forall x \in [A]_{\alpha}. \quad (16)$$

Da Equação (3), observamos que $B -_{\mathcal{F}} A$ coincide com $B -_{gH} A$ se $\mathcal{F}'(x) \geq 0$ para todo $x \in [A]_0$. Isto ocorre porque a gH -diferença é uma subtração interativa.

Por outro lado, se $\mathcal{F}'(x) < 0$ para todo $x \in [A]_0$, temos que $B -_{\mathcal{F}} A$ coincide com a diferença usual.

Similarmente, da Proposição 2, se $\mathcal{F}'(x) \geq 0$ para todo $x \in [A]_0$, então $B +_{\mathcal{F}} A$ coincide com a soma usual $B + A$. O mesmo não ocorre para $B \cdot_{\mathcal{F}} A$ e $B \div_{\mathcal{F}} A$.

$$\mathcal{F}(x) = qx + r$$

Números fuzzy linearmente interativos

Os números fuzzy A, B são linearmente interativos (ou linearmente correlacionados) se existem $q, r \in \mathbb{R}$ tais que a correspondente DPC J de A e B é dada por

$$J(x, y) = A(x)\chi_{\{(u,v); v=\mathcal{L}(u)\}}(x, y) = B(y)\chi_{\{(u,v); v=\mathcal{L}(u)\}}(x, y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$, sendo $\mathcal{L}(u) = qu + r$. Ademais, se $q > 0$ ($q < 0$) então dizemos que a correlação é positiva (negativa).

Da Equação (13), o α -nível da DPC J pode ser reescrita como:

$$[J]_{\alpha} = \{(x, qx + r) \mid x \in [A]_{\alpha}\}.$$

Uma vez que cada $[J]_{\alpha}$ é um conjunto conexo e compacto de \mathbb{R}^2 , temos que $B = qA + r$, isto é, B é a extensão de Zadeh da função $\mathcal{L} = qu + r$ aplicada ao número fuzzy A .

Assim, $[B]_{\alpha} = q[A]_{\alpha} + r$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Além disso, se $q = 0$ então temos que $B = r \in \mathbb{R}$ é linearmente interativo com $A \in \mathbb{R}_F$, desde que $B = r = 0 \cdot A + r$.

Como consequência do Teorema 6 temos que, para todo $\alpha \in [0, 1]$

- $[B +_{\mathcal{L}} A]_{\alpha} = (q + 1)[A]_{\alpha} + r$;
- $[B -_{\mathcal{L}} A]_{\alpha} = (q - 1)[A]_{\alpha} + r$;
- $[B \cdot_{\mathcal{L}} A]_{\alpha} = \{qx^2 + rx_1 \in \mathbb{R} | x \in [A]_{\alpha}\}$;
- $[B \div_{\mathcal{L}} A]_{\alpha} = \{q + \frac{r}{x} \in \mathbb{R} | x \in [A]_{\alpha}\}, 0 \notin [A]_0$.

Note que $B +_{\mathcal{L}} A = r$ se $q = -1$.

Consequentemente, se $\mathcal{F}(u) = \mathcal{L}(u) = qu + r$, nas equações (15) e (16), temos que

$$[B +_{\mathcal{L}} A]_{\alpha} = \begin{cases} [b_{\alpha}^{-} + a_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+} + a_{\alpha}^{+}] & , \text{ se } q \geq 0 \\ [b_{\alpha}^{+} + a_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{-} + a_{\alpha}^{+}] & , \text{ se } -1 \leq q < 0 \\ [b_{\alpha}^{-} + a_{\alpha}^{+}, b_{\alpha}^{+} + a_{\alpha}^{-}] & , \text{ se } q < -1 \end{cases}$$

e

$$[B -_{\mathcal{L}} A]_{\alpha} = \begin{cases} [b_{\alpha}^{-} - a_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+} - a_{\alpha}^{+}] & , \text{ se } q \geq 1 \\ [b_{\alpha}^{+} - a_{\alpha}^{+}, b_{\alpha}^{-} - a_{\alpha}^{-}] & , \text{ se } 0 \leq q < 1 \\ [b_{\alpha}^{-} - a_{\alpha}^{+}, b_{\alpha}^{+} - a_{\alpha}^{-}] & , \text{ se } q < 0 \end{cases} .$$

Considere os números fuzzy triangulares $A = (-1; 0; 1)$ com $[A]_\alpha = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$ e $B = 0,5 \cdot A - 2 = (-2, 5; -2; -1, 5)$. Dessa forma,

- $[B +_{\mathcal{L}} A]_\alpha = (1, 5)[A]_\alpha - 2 = [1, 5\alpha - 3, 5, -0, 5 - 1, 5\alpha];$
- $[B -_{\mathcal{L}} A]_\alpha = (-0, 5)[A]_\alpha - 2 = [0, 5\alpha - 2, 5, -1, 5 - 0, 5\alpha];$
- $[A -_{\mathcal{L}} A]_\alpha = (1 - 1)[A]_\alpha + 0 = [0, 0] = 0;$
- $[B \cdot_{\mathcal{L}} A]_\alpha = [0, 5\alpha^2 + \alpha - 1, 5, 0, 5\alpha^2 - 3\alpha + 2, 5];$
- $[B \div B]_\alpha = \{1 + \frac{0}{x} \in \mathbb{R} | x \in [B]_\alpha\} = [1, 1] = 1.$

Esmi, Estevão and Sánchez, Daniel Eduardo and Wasques, Vinícius Francisco and Barros, Laécio Carvalho (2020)

Solutions of higher order linear fuzzy differential equations with interactive fuzzy values

Fuzzy Sets and Systems

Diamond, Phil and Kloeden, Peter (2000)

Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis

Fundamentals of Fuzzy Sets, 583–641.

Zadeh, Lotfi A (1965)

Fuzzy sets

Information and Control, 8.3, 338–353.

Barros, Laécio C and Bassanezi, Rodney C and Tonelli, Pedro A (1997)

On the continuity of the Zadeh's extension

Proc. Seventh IFSA World Congress, 2, 3–8.

Fullér, Robert (2014)

On generalization of Nguyen's theorem: a short survey of recent developments

Advances in soft computing, intelligent robotics and control, 183–190.

Nguyen, Hung T (1978)

A note on the extension principle for fuzzy sets

Journal of mathematical analysis and applications, 64.2, 369–380.

Dubois, Didier and Prade, Henri (1981)

Additions of interactive fuzzy numbers

IEEE Transactions on Automatic Control, 26.4, 926–936.

C. Carlsson, R. Fullér and P. Majlender (2004)

Additions of completely correlated fuzzy numbers

IEEE International Conference on Fuzzy Systems 1, 535 – 539.

R. Fullér and P. Majlender (2004)

On interactive fuzzy numbers

Fuzzy Sets and Systems 143, 355 – 369.

Cabral, Valtemir Martins and Barros, Laécio C (2015)

Fuzzy differential equation with completely correlated parameters

Fuzzy sets and systems, 265, 86–98.

Barros, Laécio Carvalho and Santo Pedro, Francielle (2017)

Fuzzy differential equations with interactive derivative

Fuzzy sets and systems, 309, 64–80.

Esmi, Estevão and Santo Pedro, Francielle and Barros, Laécio Carvalho and Lodwick, Weldon (2018)

Fréchet derivative for linearly correlated fuzzy function

Information Sciences, 435, 150–160.

V. F. Wasques, E. Esmi, L. C. Barros, P. Sussner (2020)

The generalized fuzzy derivative is interactive

Information Sciences, 519, 93-109.

Números fuzzy A-correlacionados

Para um dado número fuzzy A , o conjunto de todos os números fuzzy linearmente correlacionados com A é dado por

$$\mathbb{R}_{F(A)} = \{B \in \mathbb{R}_F : [B]_\alpha = q[A]_\alpha + r, \forall \alpha \in [0, 1]\}. \quad (17)$$

Note que $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_{F(A)}$.

Número fuzzy simétrico

Dizemos que $A \in \mathbb{R}_F$ é simétrico em relação a $x \in \mathbb{R}$ se $A(x - y) = A(x + y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Neste caso, denotamos $(A|x)$. Se não houver $x \in \mathbb{R}$ tal que A seja simétrico, dizemos que A é não simétrico.

Quando $A \in \mathbb{R}_F$ é não simétrico, a função $\Psi_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ dada por $\Psi_A(q, r) = qA + r$ é um isomorfismo, de modo que Ψ_A induz uma soma $+_{\Psi_A}$ e multiplicação por escalar \cdot_{Ψ_A} , onde $+_{\Psi_A}$ e \cdot_{Ψ_A} são dadas por

- $B +_{\Psi_A} C = \Psi_A(\Psi_A^{-1}(B) + \Psi_A^{-1}(C)), \forall B, C \in \mathbb{R}_{F(A)}$;
- $\gamma \cdot_{\Psi_A} B = \Psi_A(\gamma \Psi_A^{-1}(B)), \forall B \in \mathbb{R}_{F(A)} \text{ e } \forall \gamma \in \mathbb{R}$.

Assim, temos que $(\mathbb{R}_{F(A)}, +_{\Psi_A}, \cdot_{\Psi_A})$ é um espaço de Banach de dimensão 2 sobre \mathbb{R} . Note que, para $q, r \in \mathbb{R}$, temos que $q \cdot_{\Psi_A} A +_{\Psi_A} r = qA + r$.

Observe também que se $A \in \mathbb{R}_F$ é não-simétrico e $B, C \in \mathbb{R}_{F(A)}$, definidos, respectivamente, por $B = qA + r$ e $C = mA + n$, então

- $B +_{\Psi_A} C = (q + m)A + (r + n)$;
- $B -_{\Psi_A} C = (q - m)A + (r - n)$;
- $B -_{\Psi_B} B = (q - q)A + (r - r) = 0A + 0 = 0$.
- $3 \cdot_{\Psi_B} B = 3qA + 3r$.

A soma entre dois números fuzzy A -linearmente correlacionados sempre produz um número fuzzy cujo diâmetro não excede o diâmetro da soma usual em \mathbb{R}_F , ou seja, $B +_{\Psi_A} C \subseteq B + C, \forall B, C \in \mathbb{R}_{F(A)}$. Em particular, $\lambda \cdot_{\Psi_A} B = \lambda \cdot B$.

A norma $\|B\|_{\Psi_A}$ é dada por

$$\|B\|_{\Psi_A} = \|\Psi_A^{-1}(B)\|_{\infty} \quad (18)$$

e, é fácil ver que, $\forall B, C \in \mathbb{R}_{F(A)}$, a norma $\|\cdot\|_{\Psi_A}$ induz a métrica $d_{\Psi_A}(B, C) = \|B -_{\Psi_A} C\|_{\Psi_A}$ em $\mathbb{R}_{F(A)}$.

A-Produto cruzado

Seja $A \in \widehat{\mathbb{R}}_F$ não simétrico. O Ψ_A -produto cruzado entre B e C é definido por

$$P = B \odot_{\Psi_A} C = c_1 B + {}_{\Psi_A} b_1 C - {}_{\Psi_A} b_1 c_1, \quad (19)$$

onde ${}_{\Psi_A} (+_{\Psi_A} -_{\Psi_A})$ representa a soma (subtração) em $\mathbb{R}_{F(A)}$, $[B]_1 = \{b_1\}$, $[C]_1 = \{c_1\}$ e $P \in \mathbb{R}_{F(A)}$.

Exemplo

Considere $A \in \widehat{\mathbb{R}}_F$ não simétrico e $B, C \in \mathbb{R}_{F(A)}$, dados, respectivamente, por $B = qA + r$ e $C = mA + n$. Sendo assim, $[B]_1 = \{b\} = \{qa + r\}$ e $[C]_1 = \{c\} = \{ma + n\}$, com $[A]_1 = \{a\}$. Logo,

$$B \odot_{\Psi_A} C = (2aqm + qn + mr)A + (rn - a^2qm).$$

Considere $A \in \hat{\mathbb{R}}_F$ não simétrico com $[A]_1 = \{a_1\} \neq 0$, $B = qA + r$ e $[B]_1 = \{b_1\}$. De (19), vemos que se

$$B_{\Psi_A}^{-1} = \left(-\frac{q}{b_1^2}\right)A + \left(\frac{2}{b_1} - \frac{r}{b_1^2}\right) \text{ com } b_1 = qa_1 + r$$

então $B \odot_{\Psi_A} B_{\Psi_A}^{-1} = B_{\Psi_A}^{-1} \odot_{\Psi_A} B = 1$.

Ψ_A -divisão

Seja $A \in \hat{\mathbb{R}}_F$ não simétrico. A Ψ_A -divisão entre B e C é definida por

$$B \div_{\Psi_A} C = B \odot_{\Psi_A} C_{\Psi_A}^{-1}, \quad (20)$$

sempre que $[C]_1 \neq 0$.

Na Definição acima, vemos que a Ψ_A -divisão entre dois números fuzzy A -linearmente correlacionados é uma extensão direta da divisão entre números reais, isto é, se $A, B \in \mathbb{R}$, então $A \div_{\Psi_A} B = a \div b$ sempre que $b \neq 0$.

Nesta aula, vamos apresentar uma forma prática para calcular derivadas e integrais de processos fuzzy A -linearmente correlacionados.

Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico e $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$, tais que

$$F(t) = \Psi_A(q_F(t), r_F(t)) = q_F(t)A + r_F(t)$$

e

$$G(t) = \Psi_A(q_G(t), r_G(t)) = q_G(t)A + r_G(t).$$

A adição e subtração entre F e G , a multiplicação por escalar e o produto cruzado entre F e G são definidos, respectivamente, por

$$(F \pm_{\Psi_A} G)(t) = F(t) \pm_{\Psi_A} G(t),$$

$$(\lambda \cdot_{\Psi_A} F)(t) = \lambda \cdot_{\Psi_A} F(t) = \lambda F(t)$$

$$(F \odot_{\Psi_A} G)(t) = F(t) \odot_{\Psi_A} G(t)$$

para todo $t \in [a, b]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema

Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ dada por $F(t) = q(t)A + r(t)$. Se as funções $q, r : \mathbb{R}$ são contínuas em \mathbb{R} então a função F é contínua na métrica d_∞ .

Teorema

Se a função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ é limitada, então $q, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são limitadas.

Teorema

Se $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$, dada por $F(t) = q(t)A + r(t)$, é Fréchet diferenciável, então é contínua.

Definição: Ψ -derivada

Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico. A função fuzzy $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ é Ψ -diferenciável em $t_0 \in [a, b]$ se existir um número fuzzy $F'(t_0) \in \mathbb{R}_{F(A)}$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(t_0 + h) -_{\Psi_A} F(t_0)) = F'(t_0).$$

Neste caso, dizemos que $F'(t_0)$ é a Ψ -derivada de F em t_0 . Além disso, F é Ψ -diferenciável em $[a, b]$ se $F'(t)$ existe para todo $t \in [a, b]$.

Note que a derivada de Fréchet de processos fuzzy A -linearmente correlacionados está bem definida.

Teorema

Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico. Sejam $q, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ tais que $F(t_0) = \Psi_A(q(t_0), r(t_0))$, para todo $t_0 \in [a, b]$. A função F é Fréchet diferenciável em $t_0 \in [a, b]$ se, e somente se, existem $q'(t_0)$ e $r'(t_0)$. Adicionalmente,

$$F'[t_0](h) = \Psi_A(q'(t_0)h, r'(t_0)h) = q'(t_0)hA + r'(t_0)h,$$

para todo $h \in \mathbb{R}$.

Teorema

Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico. A função fuzzy $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ é Ψ -diferenciável em $t_0 \in [a, b]$ se, e somente se, é Fréchet diferenciável em $t_0 \in [a, b]$.

Corolário

Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico. A função fuzzy $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ é Ψ -diferenciável em $t_0 \in [a, b]$ se, e somente se, $q, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis em t_0 . Além disso,

$$F'(t_0) = \Psi_A(q'(t_0), r'(t_0)) = q'(t_0)A + r'(t_0).$$

Exemplo

Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico e $F(t) = \Psi_A(t, 0) = At$. Nesse caso, a Ψ -derivada de F é dada por $F'(t) = \Psi_A(1, 0) = A$.

Seja $F(t) = \Psi_A(\sin t, t) = A \sin t + t$. A Ψ -derivada de F é dada por $F'(t) = \Psi_A(\cos t, 1) = A \cos t + 1$.

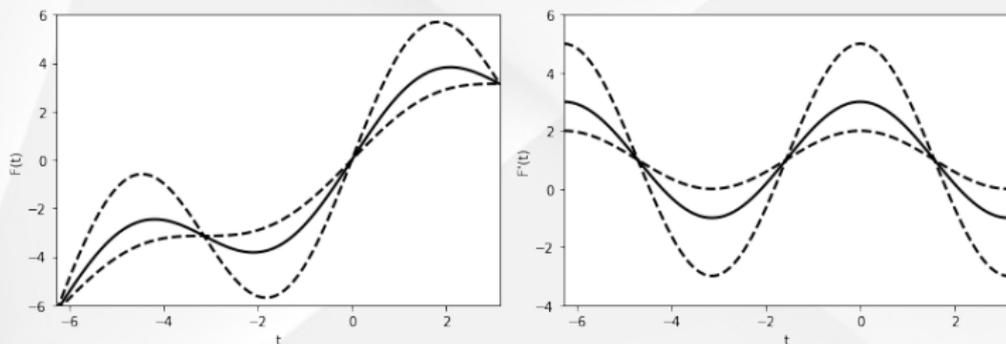


Figure: A curva tracejada representa o 0-nível e a curva contínua representa o 1-nível de $F(t)$ e $F'(t)$ do Exemplo, respectivamente, com $A = (1; 2; 4)$.

Teorema

Sejam $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ Ψ -diferenciáveis e $\lambda \in \mathbb{R}$, então
 $(F +_{\Psi_A} G)'(t) = F'(t) +_{\Psi_A} G'(t)$ e $(\lambda F)'(t) = \lambda F'(t)$.

theorem

Teorema: Regra do produto

Sejam $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ Ψ -diferenciáveis, então

$$(F(t) \odot_{\Psi_A} G(t))' = F'(t) \odot_{\Psi_A} G(t) +_{\Psi_A} F(t) \odot_{\Psi_A} G'(t);$$

Definição

Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico. Uma função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ é interativa Riemann integrável (Ψ -Riemann) se existe $S \in \mathbb{R}_F$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ com $t_i - t_{i-1} < \delta, i = 1, \dots, n$, tem-se

$$\left\| (\Psi_A) \sum_{i=1}^n F(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - \Psi_A S \right\|_{\Psi_A} < \epsilon. \quad (21)$$

sendo que $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, n$, e a somatória é dada em termos da soma interativa ($+\Psi_A$). Nesse caso, S é a integral de Riemann interativa fuzzy de F sobre $[a, b]$ e é denotada por $(\Psi_A) \int_a^b F(t)dt$.

Teorema

Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico. A função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$, dada por $F(t) = q(t)A + r(t)$, é Ψ -Riemann integrável, se, e somente se, as funções $q, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são Riemann integráveis.

$$(\Psi_A) \int_a^b F(s)ds = \left(\int_a^b q(t)dt \right) A + \int_a^b r(t)dt. \quad (22)$$

Teorema

Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ dada por $F(t) = q(t)A + r(t), \forall t \in [a, b]$ Ψ -Riemann integrável. Se $q, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, então a função integral $G(t) = (\Psi_A) \int_a^t F(s)ds$ é Ψ -diferenciável e $G'(t) = F(t), \forall t \in [a, b]$.

Teorema

Seja $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico, as funções $q, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ Ψ -diferenciável. Se F' é Ψ -Riemann integrável, então

$$(\Psi_A) \int_a^t F'(s)ds = F(t) - {}_{\Psi_A} F(a),$$

para todo $t \in [a, b]$.

Seja $F : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$, tal que $F'(t) = (\cos t)A$. Logo,

$$(\Psi_A) \int_0^t (\cos s)A ds = (\sin t)A -_{\Psi_A} (\sin 0)A = (\sin t)A.$$

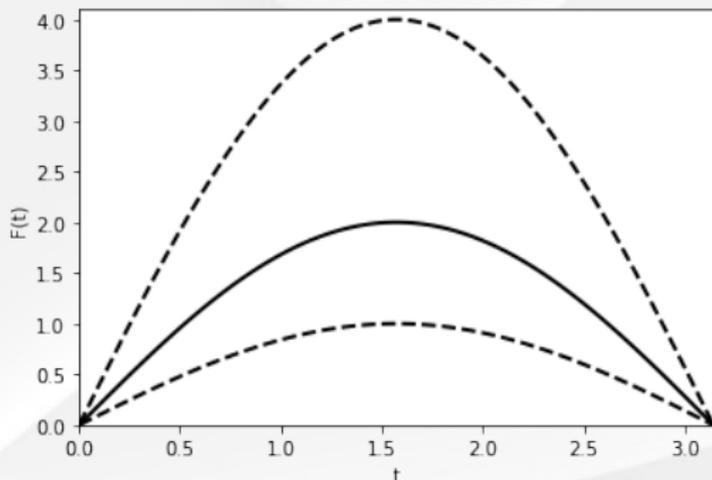


Figure: A curva tracejada representa o 0-nível e a curva contínua representa o 1-nível de $F(t)$ do Exemplo, respectivamente, com $A = (1; 2; 4)$.

Teorema: Integração por partes

Sejam $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ Ψ -diferenciáveis, então

$$(\Psi_A) \int_a^b F(t) \odot_{\Psi_A} G'(t) dt = [F(t) \odot_{\Psi_A} G(t)]_a^b -_{\Psi_A} (\Psi_A) \int_a^b G(t) \odot_{\Psi_A} F'(t) dt.$$

Exemplo

Calcule a integral da função $(\Psi_A) \int_0^\pi H(t) dt$, sendo que $H(t) = tA \odot_{\Psi_A} \cos tA$ e $[A]_1 = \{a\}$, com $a > 0$.

Considere $F(t) = tA$ e $G'(t) = \cos tA$. Assim, pelo Exemplo (??), temos que $G(t) = \sin tA$. Logo, pelo Teorema acima, temos que

$$\begin{aligned} (\Psi_A) \int_0^\pi H(t) dt &= [tA \odot_{\Psi_A} \sin tA]_0^\pi -_{\Psi_A} (\Psi_A) \int_0^\pi \sin tA \odot_{\Psi_A} 1A dt \\ &= [(2at \sin t)A + (-a^2 t \sin t)]_0^\pi \\ &-_{\Psi_A} (\Psi_A) \int_0^\pi (2a \sin t)A + (-a^2 \sin t) dt \\ &= [0A + 0] -_{\Psi_A} [(-2a \cos t)A + (a^2 \cos t)]_0^\pi \\ &= [0A + 0] -_{\Psi_A} [(4a)A + (-2a^2)] = (-4a)A + (2a^2). \end{aligned}$$

Definição: Ψ -Regra do trapézio

A Ψ -Regra do trapézio é dada por

$$(\Psi) \int_a^b F(t)dt \approx \frac{h}{2}[F(a) + \Psi_A F(b)] \equiv Q_T[F] \quad (23)$$

onde $b - a = h$. Isto é,

$$Q_T[F] = \Psi_A(Q_T[q], Q_T[r]) = Q_T[q]A + Q_T[r],$$

onde $Q_T[q]$ e $Q_T[r]$ são as regras do trapézio para as funções q e r sobre $[a, b]$, respectivamente.

O erro de aproximação em (23) é dado por

$$E_T[F] = -\frac{h^3}{12}\Psi_A(q''(t_q), r''(t_r)) = -\frac{h^3}{12}[q''(t_q)A + r''(t_r)], \quad (24)$$

para algum $t_q, t_r \in [a, b]$.

Definição: Ψ -Regra de Simpson

Considere os três pontos de interpolação $t_0 = a$, $t_1 = a + h$ e $t_2 = a + 2h = b$, onde $h = \frac{b-a}{2}$ é a separação entre pontos consecutivos. Logo, a Ψ -Regra de Simpson é dada por

$$(\Psi) \int_a^b F(t) dt \approx \frac{h}{3} (F(t_0) + \Psi_A 4F(t_1) + \Psi_A F(t_2)) \equiv Q_S[F]. \quad (25)$$

Isto é,

$$Q_S[F] = \Psi_A(Q_S[q], Q_S[r]) = Q_S[q]A + Q_S[r],$$

onde $Q_S[q]$ e $Q_S[r]$ são as regras de Simpson para as funções q e r sobre $[a, b]$, respectivamente.

O erro de aproximação em (25) é dado por

$$E_S[f] = -\frac{h^5}{90} \Psi_A (q^{(4)}(t_q), r^{(4)}(t_r)) = -\frac{h^5}{90} [q^{(4)}(t_q)A + r^{(4)}(t_r)], \quad (26)$$

para algum $t_q, t_r \in [a, b]$.

Considere o problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} X'(t) &= F(t, X(t)) \\ X(a) &= X_0 \end{cases}, \quad (27)$$

sendo $A \in \mathbb{R}_F$ não simétrico, $F : [a, b] \times \mathbb{R}_{F(A)} \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ contínua e $X_0 \in \mathbb{R}_{F(A)}$.

Lema

A função $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$ é uma solução para o problema de valor inicial (27) se, e somente se, F é contínua e satisfaz, $\forall t \in [a, b]$, a equação integral

$$X(t) = X_0 +_{\Psi_A} (\Psi_A) \int_a^t F(s, X(s)) ds. \quad (28)$$

Considere o modelo de decaimento malthusiano

$$\begin{cases} X'(t) &= -\lambda X(t) \\ X(0) &= \frac{1}{2}A + 2 \in \mathbb{R}_{F(A)} \end{cases}, \quad (29)$$

sendo $\lambda > 0$.

A solução $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$, se escreve como

$$X(t) = q(t)A + r(t) \quad (30)$$

sendo $q, r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Substituindo a Equação (30) no sistema (29), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} q'(t) &= -\lambda q(t) \\ r'(t) &= -\lambda r(t) \\ q(0) &= \frac{1}{2} \\ r(0) &= 2 \end{cases} \quad (31)$$

Resolvendo o sistema (31), obtemos a solução do PVIF (29), que é dada por

$$X(t) = \frac{1}{2} \exp(-\lambda t)A + 2 \exp(-\lambda t). \quad (32)$$

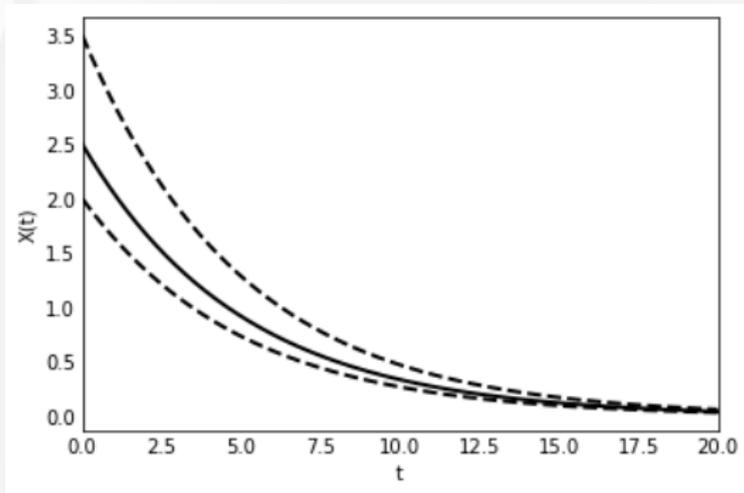


Figure: A curva tracejada representa o 0-nível e a curva contínua representa o 1-nível da solução $X(t)$ do sistema (29) com $\lambda = 0.2$, $A = (0; 1; 3)$ e condição inicial $X_0 = (2; 2.5; 3.5)$.

Agora considere $\Lambda \in \mathbb{R}_{F(A)}$ no modelo de decrescimento malthusiano (29), temos

$$\begin{cases} X'(t) &= -\Lambda \odot_{\Psi_A} X(t) \\ X(0) &= \frac{1}{2}A + 2 \in \mathbb{R}_{F(A)} \end{cases}, \quad (33)$$

sendo $\Lambda = \lambda_1 A + \lambda_2$ e $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. O produto cruzado entre Λ e $X(t)$ é dado por

$$-\Lambda \odot_{\Psi_A} X(t) = (-2a\lambda_1 q(t) - \lambda_1 r(t) - q(t)\lambda_2)A + (-\lambda_2 r(t) + a^2 \lambda_1 q(t)), \quad (34)$$

onde $[A]_1 = \{a > 0\}$. Agora, usando (34) e substituindo (30) no sistema (33), obtemos o seguinte sistema correspondente

$$\begin{cases} q'(t) &= -2a\lambda_1 q(t) - \lambda_1 r(t) - q(t)\lambda_2 \\ r'(t) &= -\lambda_2 r(t) + a^2 \lambda_1 q(t) \\ q(0) &= \frac{1}{2} \\ r(0) &= 2 \end{cases}. \quad (35)$$

A solução do PVIF (33) é encontrada ao resolvermos numericamente o sistema (35).

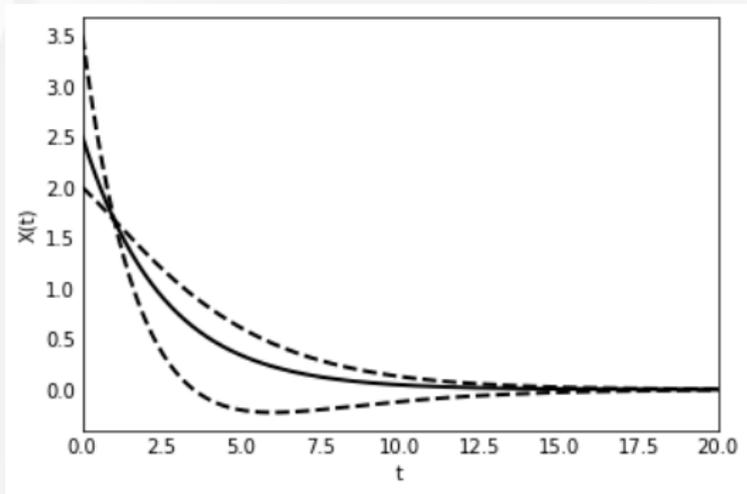


Figure: A curva tracejada representa o 0-nível e a curva contínua representa o 1-nível da solução $X(t)$ do sistema (33) com $\Lambda = 0.2A + 0.2$, $A = (0; 1; 3)$ e condição inicial $X_0 = (2; 2.5; 3.5)$.

Considere o modelo de crescimento logístico com capacidade de suporte crisp

$$\begin{cases} X'(t) &= X(t) \odot_{\Psi_A} (k - \Psi_A X(t)) \\ X(0) &= \frac{1}{2}A + 1 \in \mathbb{R}_{F(A)} \end{cases}, \quad \text{sendo } 0 < k \in \mathbb{R}. \quad (36)$$

A solução $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{F(A)}$, se escreve como

$$X(t) = q(t)A + r(t) \quad \text{sendo } q, r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (37)$$

O produto cruzado entre $X(t)$ e $k - X(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} X(t) \odot_{\Psi_A} (k - \Psi_A X(t)) &= (-2aq^2(t) + kq(t) - 2q(t)r(t))A \\ &+ (kr(t) - r^2(t) + a^2q^2(t)), \end{aligned} \quad (38)$$

onde $[A]_1 = \{a > 0\}$. Agora, usando (41) e substituindo (37) no sistema (36), obtemos o seguinte sistema correspondente

$$\begin{cases} q'(t) &= -2aq^2(t) + kq(t) - 2q(t)r(t) \\ r'(t) &= kr(t) - r^2(t) + a^2q^2(t) \\ q(0) &= \frac{1}{2} \\ r(0) &= 1 \end{cases}. \quad (39)$$

A solução do PVIF (36) é encontrada ao resolvermos numericamente o sistema (39).

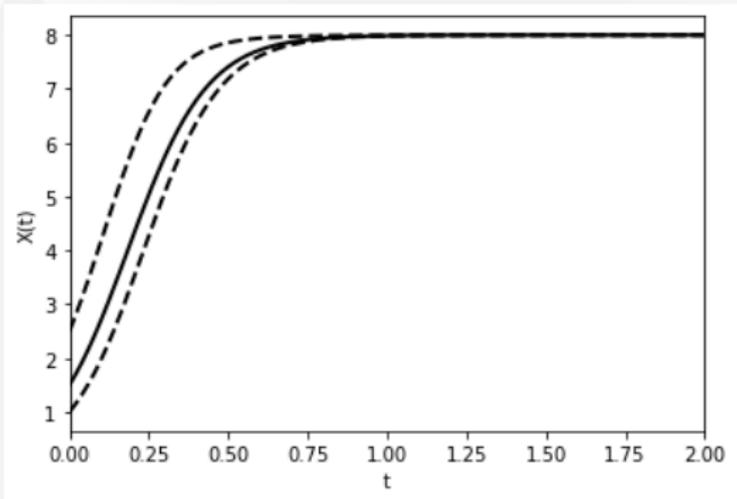


Figure: A curva tracejada representa o 0-nível e a curva contínua representa o 1-nível da solução $X(t)$ do sistema (36) com $k = 8$, $A = (0; 1; 3)$ e condição inicial $X_0 = (1; 1.5; 2.5)$.

Agora considere a capacidade de suporte fuzzy $K \in \mathbb{R}_{F(A)}$ em (36), temos

$$\begin{cases} X'(t) &= X(t) \odot_{\Psi_A} (K -_{\Psi_A} X(t)) \\ X(0) &= \frac{1}{2}A + 1 \in \mathbb{R}_{F(A)} \end{cases}, \quad \text{onde } K = k_1A + k_2 \text{ e } k_1, k_2 \geq 0. \quad (40)$$

Logo, o produto cruzado entre $X(t)$ e $K - X(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} X(t) \odot_{\Psi_A} (K -_{\Psi_A} X(t)) &= (2ak_1q(t) - 2aq^2(t) + k_2q(t) - 2q(t)r(t) + k_1r(t))A \\ &+ (k_2r(t) - r^2(t) - a^2k_1q(t) + a^2q^2(t)), \end{aligned} \quad (41)$$

onde $[A]_1 = \{a > 0\}$. Assim, obtemos o seguinte sistema correspondente

$$\begin{cases} q'(t) &= 2ak_1q(t) - 2aq^2(t) + k_2q(t) - 2q(t)r(t) + k_1r(t) \\ r'(t) &= k_2r(t) - r^2(t) - a^2k_1q(t) + a^2q^2(t) \\ q(0) &= \frac{1}{2} \\ r(0) &= 1 \end{cases}. \quad (42)$$

A solução do PVIF (40) é encontrada ao resolvermos numericamente o (42).

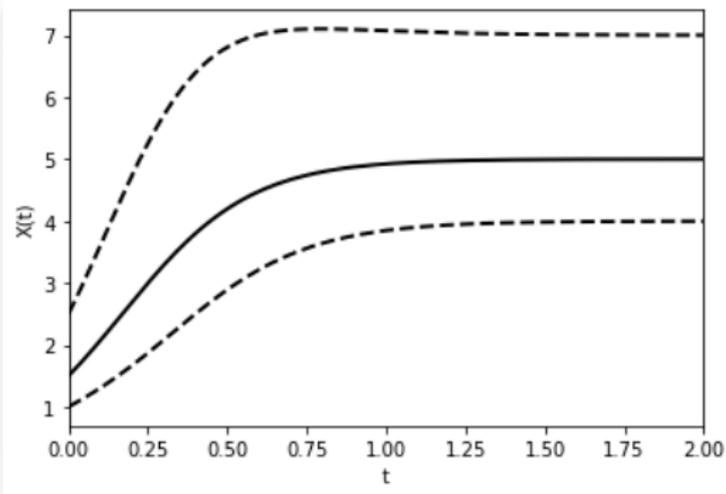


Figure: A curva tracejada representa o 0-nível e a curva contínua representa o 1-nível da solução $X(t)$ do sistema (36) com $K = 1A + 4$, $A = (0; 1; 3)$ e condição inicial $X_0 = (1; 1.5; 2.5)$.

Esmi, Estevão and Santo Pedro, Francielle and Barros, Laécio Carvalho and Lodwick, Weldon (2018)

Fréchet derivative for linearly correlated fuzzy function

Information Sciences,435, 150–160.

Santo Pedro, Francielle and Esmi, Estevão and Barros, Laécio Carvalho (2020)

Calculus for linearly correlated fuzzy function using Fréchet derivative and Riemann integral

Information Sciences,512 , 219–237.

Laiate, Beatriz and Barros, Laécio Carvalho and Santo Pedro, Francielle and Esmi, Estevão (2021)

Bidimensional fuzzy initial value problem of autocorrelated fuzzy processes via cross product: the prey-predator model

In International Fuzzy Systems Association World Congress. EUSFLAT.

Longo, Felipe and Laiate, Beatriz and Santo Pedro, Francielle and Esmi, Estevão and Barros, Laécio Carvalho, and Meyer, João F. C. C. (2021)

A-cross product for autocorrelated fuzzy processes: the Hutchinson equation

North American Fuzzy Information Processing Society Annual Conference (pp. 241-252). Springer, Cham.

Laiate, B., Watanabe, R. A., Esmi, E., Santo Pedro, F., and Barros, L. C. (2021)

A cross product of \mathcal{S} -linearly correlated fuzzy numbers.

In 2021 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE) (pp. 1-6). IEEE.

Santo Pedro, Francielle and Laiate, Beatriz and Esmi, Estevão and Barros, Laécio Carvalho (2021)

Interactive Riemann Integral in the Space of the Linearly Correlated Fuzzy Numbers $\mathbb{R}_{F(A)}$

Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy (CBSF)

Esta seção estudará um outro tipo de interatividade que é associada a uma família de distribuições de possibilidade conjunta parametrizada J_γ , em que o parâmetro γ assume valores no intervalo $[0, 1]$ e estabelece o nível de interatividade entre as variáveis fuzzy.

As distribuições J_γ são mais amplas que a DPC J_L no seguinte sentido, não há restrições quanto a forma dos números fuzzy.

Por exemplo, um número fuzzy simétrico pode ser J_γ -interativo com um número fuzzy não simétrico, ou ainda, um número fuzzy triangular pode ser J_γ -interativo com um número fuzzy trapezoidal, o que não ocorre em $\mathbb{R}_F(A)$.

Para a construção desse tipo de distribuição de possibilidade conjunta, é necessário utilizar o conceito de translações de números fuzzy.

Translações de números fuzzy

Sejam $A, B \in \mathbb{R}_{FC}$ tais que $[A]_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}]$ e $[B]_{\alpha} = [b_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+}]$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Os números fuzzy trasladados correspondentes são dados por

$$A^{(\bar{a})}(x) = A(x - \bar{a}) \quad \text{e} \quad B^{(\bar{b})}(x) = B(x - \bar{b}), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

em que $\bar{a} = \frac{a_1^{-} + a_1^{+}}{2}$ e $\bar{b} = \frac{b_1^{-} + b_1^{+}}{2}$ são os pontos médios dos 1-níveis de A e B , respectivamente.

Os α -níveis de $A^{(\bar{a})}$ e $B^{(\bar{b})}$ são denotados por $[A^{(\bar{a})}]_{\alpha} = [(a^{(\bar{a})})_{\alpha}^{-}, (a^{(\bar{a})})_{\alpha}^{+}]$ e $[B^{(\bar{b})}]_{\alpha} = [(b^{(\bar{b})})_{\alpha}^{-}, (b^{(\bar{b})})_{\alpha}^{+}]$, sendo $(a^{(\bar{a})})_{\alpha}^{-} = a_{\alpha}^{-} - \bar{a}$, $(a^{(\bar{a})})_{\alpha}^{+} = a_{\alpha}^{+} - \bar{a}$, $(b^{(\bar{b})})_{\alpha}^{-} = b_{\alpha}^{-} - \bar{b}$, e $(b^{(\bar{b})})_{\alpha}^{+} = b_{\alpha}^{+} - \bar{b}$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

A família de distribuições de possibilidade conjunta J_γ é definida a partir da seguinte função de pertinência

$$J_\gamma(x_1, x_2) = \begin{cases} \min\{A(x_1), B(x_2)\} & , \text{ se } (x_1, x_2) \in P(\gamma) \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}, \quad (43)$$

em que $P(\gamma) := P_A(\gamma) \cup P_B(\gamma)$ é definida pela região onde a relação fuzzy J_γ satisfaz $J_\gamma(u, v) > 0$. O conjunto $P(\gamma)$ é dado por

$$P_A(\gamma) = \left(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left(\bigcup_{x \in \{a_\alpha^-, a_\alpha^+\}} \{x\} \times I_A(x, \alpha, \gamma) \right) \right)$$

e

$$P_B(\gamma) = \left(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left(\bigcup_{x \in \{b_\alpha^-, b_\alpha^+\}} \{x\} \times I_B(x, \alpha, \gamma) \right) \right),$$

sendo que

$$I_A(x, \alpha, \gamma) = [\bar{b} + f_A^\alpha(x) + \gamma((b^{(\bar{b})})_\alpha^- - f_A^\alpha(x)), \bar{b} + f_A^\alpha(x) + \gamma((b^{(\bar{b})})_\alpha^+ - f_A^\alpha(x))],$$

e

$$I_B(x, \alpha, \gamma) = [\bar{a} + f_B^\alpha(x) + \gamma((a^{(\bar{a})})_\alpha^- - f_B^\alpha(x)), \bar{a} + f_B^\alpha(x) + \gamma((a^{(\bar{a})})_\alpha^+ - f_B^\alpha(x))],$$

com f_A^α e f_B^α dados respectivamente por

$$f_A^\alpha(x) = \min\{(\max\{-(x - \bar{a}), ((b^{(\bar{b})})_\alpha^-)\}), ((b^{(\bar{b})})_\alpha^+)\}$$

e

$$f_B^\alpha(x) = \min\{(\max\{-(x - \bar{b}), ((a^{(\bar{a})})_\alpha^-)\}), ((a^{(\bar{a})})_\alpha^+)\}.$$

A interpretação associada ao parâmetro $\gamma \in [0, 1]$ é a seguinte, quanto mais próximo de 0 for o valor de γ , maior é a interatividade entre os números fuzzy A e B , de modo que a DPC J_0 é similar a DPC J_L .

Enquanto que quanto mais próximo de 1 for o valor de γ , menor é a interatividade entre os números fuzzy A e B , de modo que a J_1 é igual a J_\wedge , isto é, a DPC J_1 remete a não interatividade.

Podemos também definir uma aritmética para números fuzzy interativos, segundo a família de DPCs J_γ conforme veremos a seguir.

Podemos também definir uma aritmética para números fuzzy interativos, segundo a família de DPCs J_γ .

Teorema

Sejam $A, B \in \mathbb{R}_{FC}$, cujos α -níveis são $[A]_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ e $[B]_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$, e J_γ a DPC entre A e B dada por (43). Para cada $\gamma \in [0, 1]$, tem-se que $A +_\gamma B \in \mathbb{R}_{FC}$ e os α -níveis de $A +_\gamma B$ são dados por

$$[A +_\gamma B]_\alpha = [c_\alpha^-, c_\alpha^+] + \{\bar{a} + \bar{b}\} \quad (44)$$

sendo,

$$c_\alpha^- = \inf_{\beta \geq \alpha} h_{(A+B)}^-(\beta, \gamma) \text{ e } c_\alpha^+ = \sup_{\beta \geq \alpha} h_{(A+B)}^+(\beta, \gamma). \quad (45)$$

com

$$h_{(A+B)}^-(\beta, \gamma) = \min\{ (a(\bar{a}))_\beta^- + (b(\bar{b}))_\beta^+ + \gamma((b(\bar{b}))_\beta^- - (b(\bar{b}))_\beta^+), \\ (a(\bar{a}))_\beta^+ + (b(\bar{b}))_\beta^- + \gamma((a(\bar{a}))_\beta^- - (a(\bar{a}))_\beta^+), \\ \gamma((a(\bar{a}))_\beta^- + (b(\bar{b}))_\beta^-) \}$$

e

$$h_{(A+B)}^+(\beta, \gamma) = \max\{ (a(\bar{a}))_\beta^- + (b(\bar{b}))_\beta^+ + \gamma((a(\bar{a}))_\beta^+ - (a(\bar{a}))_\beta^-), \\ (a(\bar{a}))_\beta^+ + (b(\bar{b}))_\beta^- + \gamma((b(\bar{b}))_\beta^+ - (b(\bar{b}))_\beta^-), \\ \gamma((a(\bar{a}))_\beta^+ + (b(\bar{b}))_\beta^+) \}$$

A soma interativa $+_\gamma$ satisfaz também a seguinte condição, $A +_{\gamma_1} B \subseteq A +_{\gamma_2} B$, para todos $A, B \in \mathbb{R}_{FC}$ e $0 \leq \gamma_2 \leq \gamma_1 \leq 1$.

A diferença baseada nesse tipo de interatividade é definida por $A -_{\gamma} B = A +_{\gamma} (-B)$, e seus α -níveis são dados a seguir

Teorema

Sejam $A, B \in \mathbb{R}_{FC}$ cujos α -níveis são dados por $[A]^{\alpha} = [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}]$ e $[B]^{\alpha} = [b_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+}]$. Portanto, para todo $\alpha \in [0, 1]$ tem-se

$$[A -_{\gamma} B]_{\alpha} = [d_{\alpha}^{-}, d_{\alpha}^{+}] + \{\bar{a} - \bar{b}\}, \quad (46)$$

em que

$$d_{\alpha}^{-} = \inf_{\beta \geq \alpha} h_{(A-B)}^{-}(\beta, \gamma) \text{ e } d_{\alpha}^{+} = \sup_{\beta \geq \alpha} h_{(A-B)}^{+}(\beta, \gamma). \quad (47)$$

com

$$h_{(A-B)}^{-}(\beta, \gamma) = \min\{ (a(\bar{a}))_{\beta}^{-} - (b(\bar{b}))_{\beta}^{-} + \gamma((b(\bar{b}))_{\beta}^{-} - (b(\bar{b}))_{\beta}^{+}), \\ (a(\bar{a}))_{\beta}^{+} - (b(\bar{b}))_{\beta}^{+} + \gamma((a(\bar{a}))_{\beta}^{-} - (a(\bar{a}))_{\beta}^{+}), \\ \gamma((a(\bar{a}))_{\beta}^{-} - (b(\bar{b}))_{\beta}^{+}) \}$$

e

$$h_{(A-B)}^{+}(\beta, \gamma) = \max\{ (a(\bar{a}))_{\beta}^{-} - (b(\bar{b}))_{\beta}^{-} + \gamma((a(\bar{a}))_{\beta}^{+} - (a(\bar{a}))_{\beta}^{-}), \\ (a(\bar{a}))_{\beta}^{+} - (b(\bar{b}))_{\beta}^{+} + \gamma((b(\bar{b}))_{\beta}^{+} - (b(\bar{b}))_{\beta}^{-}), \\ \gamma((a(\bar{a}))_{\beta}^{+} - (b(\bar{b}))_{\beta}^{-}) \}.$$

Sejam $A = (1; 2; 3)$ e $B = (1; 2; 3; 4)$ números fuzzy. As somas J_γ -interativas são dadas por

$$[A +_\gamma A]_\alpha = [\gamma(-2 + 2\alpha), \gamma(2 - 2\alpha)] + 4.$$

$$[A +_\gamma B]_\alpha = [-0.5 + \gamma(-2 + 2\alpha), 0.5 + \gamma(2 - 2\alpha)] + 4.5.$$

Veja que para $\gamma = 1$, a soma obtida é a usual, enquanto que para $\gamma = 0$ a soma $A +_0 A$ é igual a soma $A +_L A$ negativamente correlacionada.

Isso ocorre em geral, isto é, a soma via $\gamma = 1$ remete a não-interatividade e a soma $\gamma = 0$ é equivalente à soma negativamente correlacionada, quando essa existe.

Já no caso da soma entre A e B a soma via J_L não é possível ser computada, já que A e B não são completamente correlacionados.

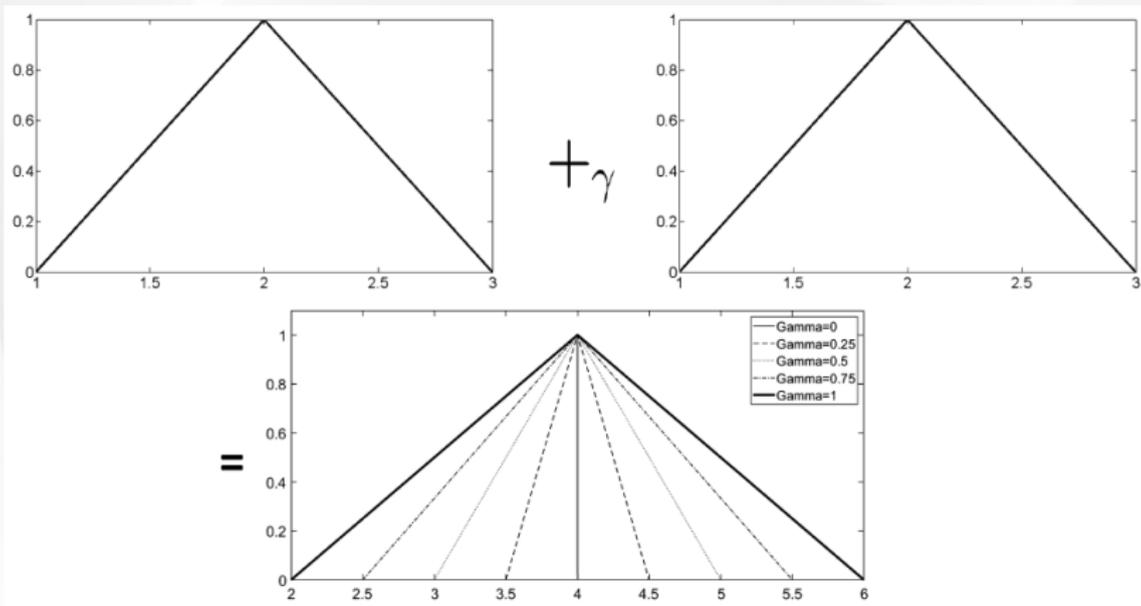


Figure: Soma J_γ -iterativa $A +_\gamma A$ para $\gamma = 0, \gamma = 0,25, \gamma = 0,5, \gamma = 0,75$ e $\gamma = 1$, com $A = (1; 2; 3)$.

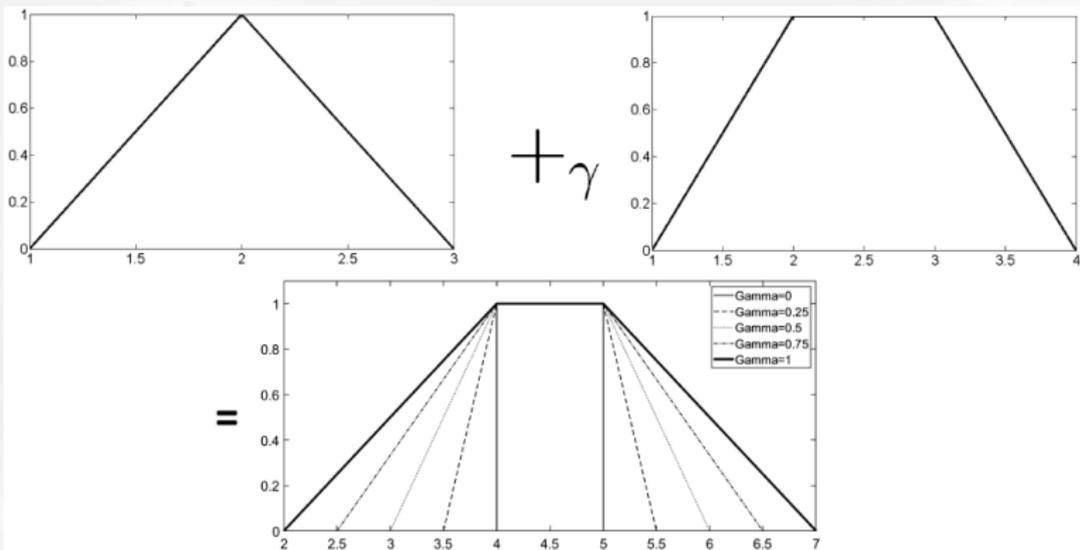


Figure: Soma J_γ -interativa $A +_\gamma B$ para $\gamma = 0, \gamma = 0,25, \gamma = 0,5, \gamma = 0,75$ e $\gamma = 1$, com $A = (1; 2; 3)$ e $B = (1; 2; 3; 4)$.

Sejam $A = (2; 3; 5; 6)$ e $B = (0; 4; 8)$ números fuzzy. Assim, as diferenças J_γ -interativas são dadas por

$$[A -_\gamma A]^\alpha = [\gamma(-4 + 2\alpha), \gamma(4 - 2\alpha)] + 0.$$

$$[A -_\gamma B]^\alpha = \left[\bigwedge_{\beta \geq \alpha} \min\{2 - 3\beta + \gamma(-8 + 8\beta), -2 + 3\beta + \gamma(-4 + 2\beta), \gamma(-6 + 5\beta)\}, \right. \\ \left. \bigvee_{\beta \geq \alpha} \max\{2 - 3\beta + \gamma(4 - 2\beta), -2 + 3\beta + \gamma(8 - 8\beta), \gamma(6 - 5\beta)\} \right] + 0.$$

Para $\gamma = 1$, a J_γ -diferença é equivalente a diferença usual entre números fuzzy, como pode ser visto nas Figuras 11 e 12. Por outro lado, para a diferença J_γ -interativa, com $\gamma = 0$, coincide com a g -diferença entre números fuzzy.

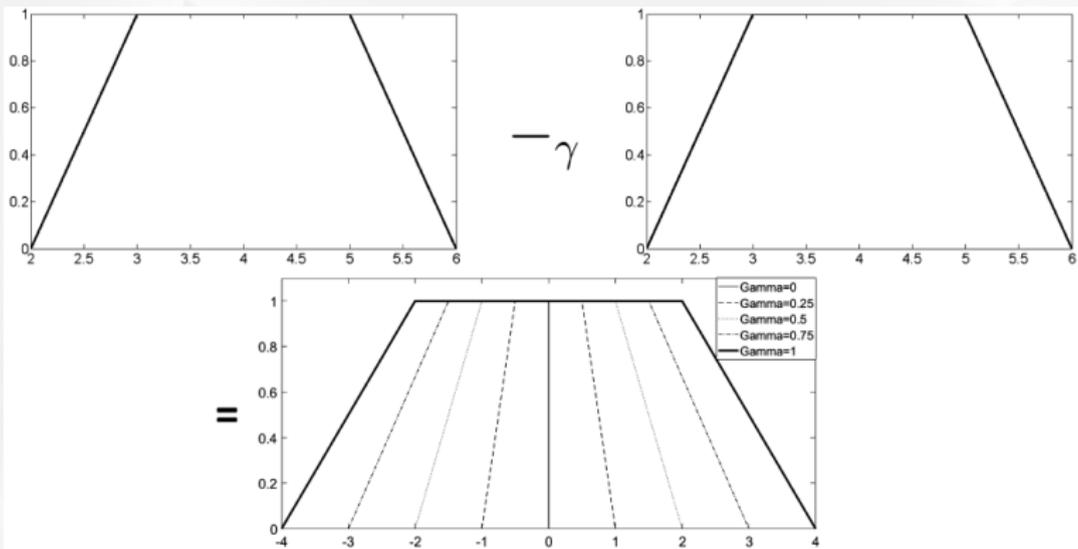


Figure: Diferença J_{γ} -interativa $A -_{\gamma} A$ para $\gamma = 0, \gamma = 0,25, \gamma = 0,5, \gamma = 0,75$ e $\gamma = 1$, com $A = (2; 3; 5; 6)$.

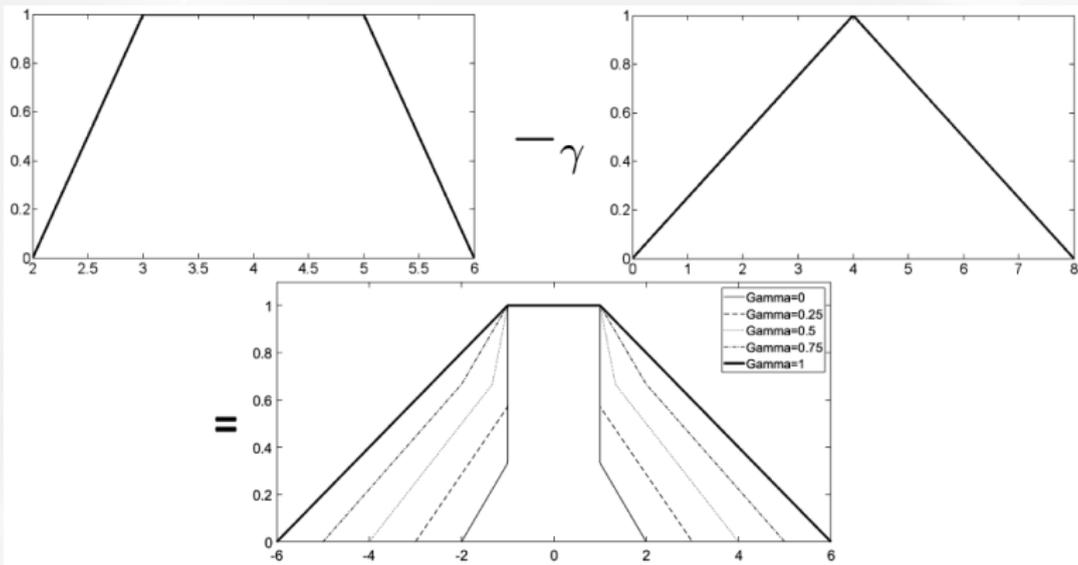


Figure: Diferença J_γ -interativa $A - \gamma B$ para $\gamma = 0, \gamma = 0,25, \gamma = 0,5, \gamma = 0,75$ e $\gamma = 1$, com $A = (2; 3; 5; 6)$ e $B = (0; 4; 8)$.

A partir da J_γ -diferença é possível definir uma nova família de derivadas fuzzy, que incorpora a noção de interatividade.

Definição

Seja $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathbb{F}_C}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. Para cada $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$, considere J_h a distribuição de possibilidade conjunta entre $y(x_0 + h)$ e $y(x_0)$, e seja $\mathcal{J} = \{J_h \mid 0 < |h| < \delta\}$. A *derivada interativa* da função fuzzy $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathbb{F}_C}$ em x_0 com respeito a \mathcal{J} , é dada por

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + h) -_{J_h} y(x_0)}{h}, \quad (48)$$

se o limite existe. Nesse caso, o limite (48) é chamado de derivada interativa de y em x_0 e é denotado por $y'_{\mathcal{J}}(x_0)$.

Considere um PVIF com a derivada interativa fuzzy J_h

$$\begin{cases} y'_{\mathcal{J}}(x) = f(y(x), x) \\ y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}_{F_C} \end{cases} . \quad (49)$$

Isso significa que para determinar a solução para esse problema, é necessário primeiramente definir qual é a família de distribuições que está sendo considerada.

Em particular, se a família de DPCs é a $\mathcal{I} = \{J_{\gamma_h} \mid 0 < |h| < \delta\}$ em que J_{γ_h} são as DPCs entre $y(x_0 + h)$ e $y(x_0)$ dadas por (43), então $y'_{\mathcal{I}}$ é chamada de \mathcal{I} -derivada interativa de y .

Observe que para uma função fuzzy $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{F_C}$ dada, as DPCs J_{γ_h} relacionam os números fuzzy $y(t)$ e $y(t + h)$, para todo $h \in \mathbb{R}$.

Teorema

Seja $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathbb{F}_C}$. Então y é g -diferenciável se, e somente se, y é \mathcal{I} -diferenciável.

Como a g -derivada generaliza as derivadas Hukuhara e Hukuhara generalizada, então estas também são casos particulares de derivadas iterativas.

Numericamente o PVIF dado em (49) pode ser estudado como

$$\frac{y(x_0 + h) -_{\gamma} y(x_0)}{h} = f(y(x), x) \iff y(x_0 + h) = y(x_0) +_{\gamma} h(f(y(x), x)),$$

para todo $h > 0$.

A expressão à direita pode ser vista como uma generalização do método clássico de Euler.

O método clássico de Euler é utilizado para aproximar as soluções clássicas de equações diferenciais ordinárias a partir de uma condição inicial, dada por

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} . \quad (50)$$

O algoritmo do método de Euler é descrito por

$$x_{k+1} = x_k + hf_i(t_k, x_k), \quad (51)$$

com $0 \leq k \leq N - 1$, em que N é o número de partições que o intervalo é dividido, h é o tamanho de cada subintervalo $[t_k, t_{k+1}]$, cuja condição inicial é dada por (t_0, x_0) .

Em nosso caso, consideraremos que a condição inicial será incerta e dada por números fuzzy. Desse modo, as aritméticas presentes no método de Euler devem ser adaptadas para esses números. Sendo assim, a partir de uma condição inicial dada por número fuzzy, o método fica

$$X_{k+1} = X_k +_J hf(t_k, X_k). \quad (52)$$

Para ilustrar melhor essa abordagem, considere o modelo populacional de Malthus dado pelo seguinte PVIF

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_{F_C} \end{cases}, \quad (53)$$

com $\lambda > 0$.

Para o PVIF dado em (53) a solução numérica é determinada por

$$X_{k+1} = X_k +_J h(\lambda X_k). \quad (54)$$

Veja que essa abordagem permite considerar soluções com diâmetros crescentes ou decrescentes, baseados na escolhas dos valores de $\gamma \in [0, 1]$.

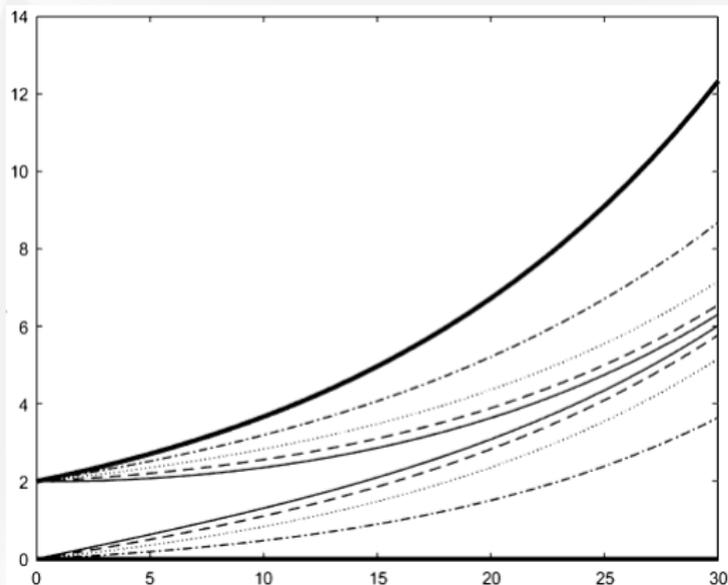


Figure: Visão superior da solução numérica para o modelo de Malthus dado em (54). As linhas contínuas, tracejadas, pontilhadas, pontilhadas-tracejadas e em negrito representam as soluções numéricas para $\gamma = 0$, $\gamma = 0,25$, $\gamma = 0,5$, $\gamma = 0,75$ e $\gamma = 1$, respectivamente. A condição inicial é dada por $A = (0; 1; 2)$ e os parâmetros utilizados foram $h = 0,125$ e $\lambda = 0,5$.

Para essa abordagem, também consideramos um sistema descrito por uma equação diferencial em que as condições iniciais são incertas e dadas por números fuzzy, isto é,

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_{F_C} \end{cases} \quad (55)$$

Para resolver essa EDF através do princípio de extensão sup- J é preciso primeiro obter a solução analítica clássica da equação diferencial $x'(t) = f(x(t), t)$, para que em seguida seja estendida pelo princípio de extensão.

Quando se tem uma única condição inicial fuzzy, o princípio de extensão sup- J produz a mesma solução, independentemente da conjunta J escolhida (em particular para J_{\wedge}).

Considere a seguinte equação diferencial que descreve uma dinâmica de advecção

$$\begin{cases} u_t + \kappa u_x = 0 \\ u(x, 0) = \eta(x) \end{cases}, \quad (56)$$

em que κ representa a velocidade constante, $\eta(x)$ uma função que descreve a condição inicial do problema, u_t e u_x são as derivadas parciais com respeito ao tempo e ao espaço, respectivamente.

A equação de advecção é amplamente utilizada nas áreas de física e engenharia para descrever o transporte de substâncias ou quantidades, através de um fluxo.

Por exemplo, para descrever o transporte de poluentes em um rio.

A solução de (56) é dada por

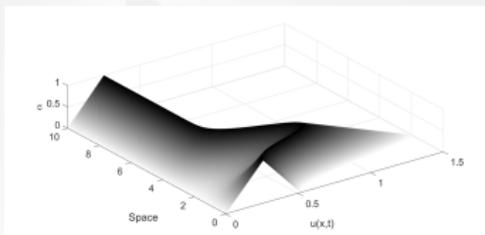
$$u(x, t) = \eta(x - \kappa t). \quad (57)$$

Considerando que no sistema (56) a condição inicial seja fuzzy, isto é, $\eta(x)$ atribui para cada $x \in \mathbb{R}$ um valor fuzzy, utilizaremos o princípio de extensão sup- J para estender a solução $u(x, t) = \eta(x - \kappa t)$.

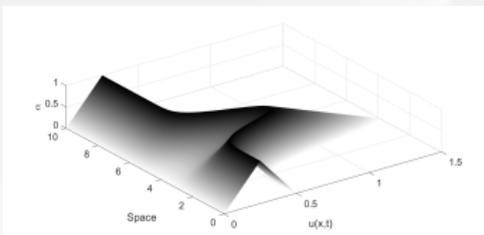
Para exemplificar, considere o sistema abaixo

$$\begin{cases} u_t + 0.5u_x = 0 \\ u(x, 0) = A \exp(-(x-2)^2) + B \\ A \in \mathbb{R}_{F_C} \\ B \in \mathbb{R}_{F_C} \end{cases} \quad (58)$$

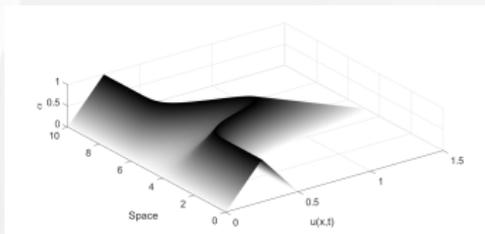
Tomando $A = (0; 0.5; 1)$ e $B = (0; 0.25; 0.5)$, obtemos as seguintes soluções representadas nos gráficos a seguir.



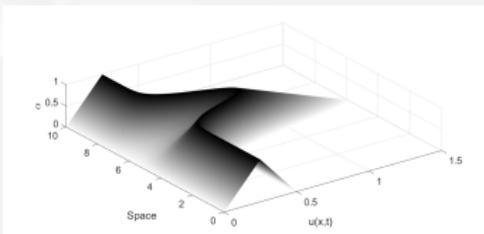
(a) Solução em $t = 0$.



(b) Solução em $t = 3.8$.

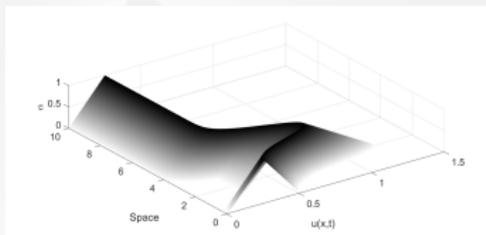


(c) Solução em $t = 5.8$.

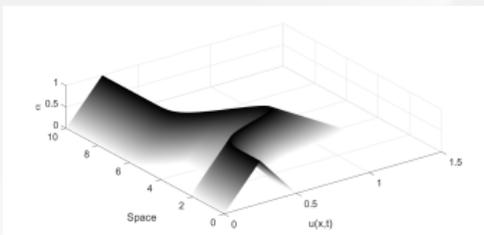


(d) Solução em $t = 7.8$.

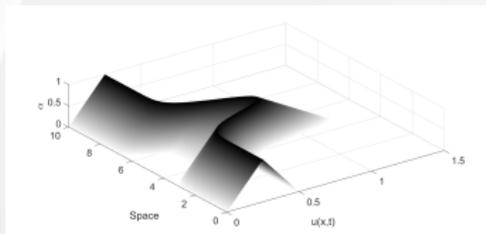
Figure: Solução fuzzy de (58) via princípio de extensão sup- J , para $J = J_1$.



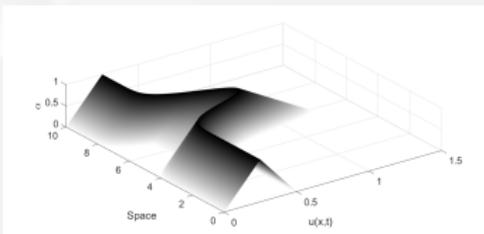
(a) Solução em $t = 0$.



(b) Solução em $t = 3.8$.

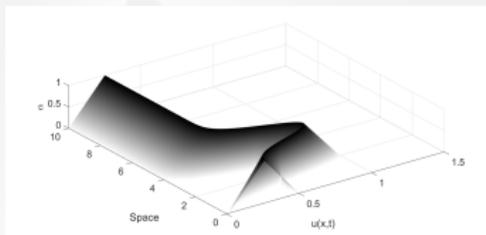


(c) Solução em $t = 5.8$.

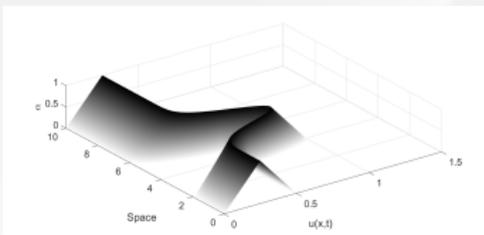


(d) Solução em $t = 7.8$.

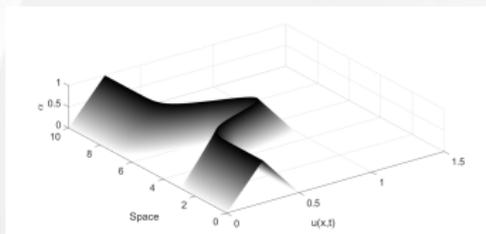
Figure: Solução fuzzy de (58) via princípio de extensão sup- J , para $J = J_{0.5}$.



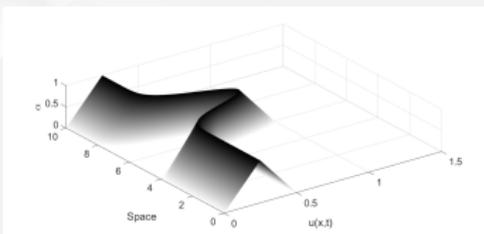
(a) Solução em $t = 0$.



(b) Solução em $t = 3.8$.



(c) Solução em $t = 5.8$.



(d) Solução em $t = 7.8$.

Figure: Solução fuzzy de (58) via princípio de extensão sup- J , para $J = J_0$.

As Figuras 14, 15 e 16 apontam que o local de maior incerteza ocorre no extremo valor da solução clássica.

Essa incerteza pode ser controlada pelas DPCs J_γ .

Na verdade, o diâmetro das soluções fuzzy, para cada x , é decrescente conforme o valor de γ diminui.

Essa propriedade está associada com o fato de que $J_\lambda \subseteq J_\gamma$, para todo $0 \leq \lambda \leq \gamma \leq 1$.

Consequentemente, a solução fuzzy obtida por J_0 é mais específica que $J_{0.5}$ e J_1 .

Em outras palavras, o uso de interatividade faz com que a solução fuzzy propague menos incerteza que no caso de não interatividade.

Ainda mais, dentre os valores de $\gamma \in [0, 1]$, a J_0 produz a menor incerteza possível.

E. Esmi and V. F. Wasques and L. C. Barros (2021)

Addition and subtraction of interactive fuzzy numbers via family of joint possibility distributions

Fuzzy Sets and Systems

Vinícius Wasques and Estevão Esmi and Laécio C. Barros (2021)

Solution to the Advection Equation with Fuzzy Initial Condition via Sup-J Extension Principle

2021 Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2021)

P. Sussner and E. Esmi and L. C. Barros (2016)

Controlling the width of the sum of interactive fuzzy numbers with applications to fuzzy initial value problems

IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 1, 85–104

Obrigado!

